極小曲面の安定性について (部分多様体の微分幾何学)

AUTHOR(S):

武藤, 秀夫

数理解析研究所講究録
408巻 1980年 152-155

極小曲面の安定性について

東北大・理　　武藤　秀夫

Barbosa－do Carmo[1,2]の極小曲面の安定性についての結果の紹介と、その条件の評価についての注意を述べる。$\overline{M}^n_a$を断面曲率 a の space form とする。M^2を境界をもつ単連結コンパクトな$\overline{M}^n_a$の中の極小曲面とする。M^2が安定とは、境界で消えるMに沿った任意の non-zero 法ベクトル場Nに対して、体積の第2変分Iが、$I(N,N) > 0$ をみたす時をいう。

問題　どんなM^2が安定か？（generalized）Gauss map の性質から安定性がわかるか？

定理（Barbosa－do Carmo [1,2]）　M^2を、境界をもつ単連結コンパクトな、$\mathbb{R}^n$（resp. $S^n(r)$）の中の極小曲面とする。

(1) $n = 3$ の時、$\int_M -K\,dA < 2\pi$　（resp. $\int_M (\frac{2}{r^2} - K)\,dA < 2\pi$）ならば、$M^2$は安定。更に、定数$2\pi$は、次の意味で"sharp"である。：$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\int_{M(\varepsilon)} -K\,dA = 2\pi + \varepsilon$ （resp. $\int_{M(\varepsilon)} (\frac{2}{r^2} - K)\,dA = 2\pi + \varepsilon$）をみたす不安定な極小曲面$M^2(\varepsilon)$が存在する。

(2) $n \geqq 4$ の時. $\int_M -K\,dA < \frac{4}{3}\pi$ (resp. $\int_M (\frac{2}{r^2}-K)\,dA < \frac{4}{3}\pi$) ならば、$M^2$は安定である。

ここで、Kは. M^2の断面曲率, dA は体積要素である。

方針 νをM^2に沿った単位法ベクトル場, uを∂M^2で消えるM上の滑らかな関数とする。M^2上のリーマン計量をgとし、gによる内積を$(\ ,\ )_g$とする。この時, $I(u\nu, u\nu) \geqq \int_M (\,|du|_g^2 - 2(2a-K)u^2)\,dA$。ここで、$n=3$の時、常に等号が成立することを注意する。以下. 簡単のため. $a>0$. つまり. $\overline{M}^n(a) = S^n(r)$ の場合について考える。

1°) λ_1の比較問題への帰着。 $\tilde{g} = (2a-K)g$ と新しい計量を定義すると. レーリーの原理より. $I(u\nu, u\nu) \geqq \int_M (\,|du|_{\tilde{g}}^2 - 2u^2)\,d\tilde{A} \geqq (\tilde{\lambda}_1(M)-2)\int_M u^2\,d\tilde{A}$。ここで、$\tilde{\lambda}_1(M)$は. $\tilde{g}$によるLaplacianのDirichlet条件下での第1固有値である。したがって, $\tilde{\lambda}_1(M) > 2$ となる条件を求める問題に帰着される。

2°) 等周不等式による第1固有値の比較。

定理 (Peetre [8], Bandle [3], Barbosa-do Carmo [2]).
M^2を. 境界をもつ単連結コンパクトな曲面で. Gauss曲率Kが、$K \leqq K_0$ (K_0: 定数) をみたすとする。この時. Mの面積Aが、$K_0 A < 4\pi$ をみたすなら. $\lambda_1(M) \geqq \lambda_1(D)$。ここで、Dは、定曲率$K_0$の2次元space formの中の geodesic ball of area A。

3°). $\tilde{g}$による断面曲率$\tilde{K}$の評価. $n=3$の時. 実際の計算により. $\tilde{K} \leq 1$を得る。$G: M^2 \longrightarrow G_{2,n+1} = Q_{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$をgeneralized Gauss mapとする。$\mathbb{C}P^n$に, max.{sectional curvature} $=2$となるように計量をnormalizeし. Q_{n-1}でのinduced metricをds^2とすれば. $\tilde{g} = G^* ds^2$。更に. Gは. anti-hol。故に. $n \geq 4$の時, $\tilde{K} \leq 2$。

4°) 命題 (Barbosa-do Carmo [2]) Dを$S^2(1)$上のgeodesic ballとし、$A(D)$をDの面積($>2\pi$)とする。この時,
$\lambda_1(D) \geq 2(4\pi - A(D))/A(D)$.

最後に. 2次元多様体の場合. $\lambda_1 vol$は. $g \mapsto \alpha g$ (α: 定数) なる計量の変換で不変であることに注意すると、定理が得られる。

注意1　4°)の命題を. Barbosa-do Carmo [2]は. 等周不等式を用いて示した。ところが. 全く同じ評価式を. 適当な関数にBartaの定理を適用させることにより示すことができる。そして. Bartaの定理を振り返ることにより. 定理(2)の定数$\frac{4}{3}\pi$が、"sharp"でないことがわかる。

注意2　この講究録の原稿を作成中に. 定理(2)の定数$\frac{4}{3}\pi$を. 1.4505πに置き換えてもよいことがわかった。

参考文献

[1] J. L. Barbosa and M. do Carmo, On the size of a minimal surface in $\mathbb{R}^3$, Amer. J. Math. 98 (1976), 515-528.

[2] J. L. Barbosa and M. do Carmo, Stability of minimal surfaces and eigenvalues of the Laplacian, Math. Z. 173 (1980), 13-28.

[3] C. Bandle, Konstruktion isoperimetrischer Ungleichungen der Mathematischen Physik aus solchen der Geometrie, Comment Math. Helv. 46 (1971), 182-213.

[4] J. Barta, Sur la vibration fondamentale d'une membrane C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), 472-473.

[5] D. Hoffman and R. Osserman, The area of the generalized Gaussian image and the stability of minimal surfaces in S^n and $\mathbb{R}^n$, (preprint).

[6] D. Hoffman and R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, (preprint).

[7] R. Osserman, Minimal surfaces, Gauss map, total curvature, eigenvalue estimates and stability, (preprint).

[8] J. Peetre, A generalization of Courant's nodal domain theorem Math. Scand. 5 (1957), 15-20.